

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.16 Стохастический анализ

наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом

Направление подготовки / специальность

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

02.03.01.31 Математическое и компьютерное моделирование

Форма обучения

очная

Год набора

2022

Красноярск 2022

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили _____

к.ф.-м.н., доцент, Золотов О.А.

должность, инициалы, фамилия

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины

Дисциплина «Стохастический анализ» относится к базовой части профессионального цикла, предмет ее составляют математические модели случайных явлений, математические методы систематизации, обработки и использования выборочных данных для научных и практических выводов.

Стохастический анализ входит в цикл профессиональных дисциплин в базовой части.

Освоение первой части стохастического анализа (теории вероятностей) необходимо для дальнейшего изучения математической статистики (второй части). Знание стохастического анализа может существенно помочь в научно-исследовательской работе.

1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачей изучения дисциплины является: подготовка в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов для получения профилированного высшего профессионального образования; формирование универсальных и профессиональных компетенций, позволяющих выпускнику успешно работать в избранной сфере деятельности

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
	ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности
ОПК-1.9: Использует базовые фундаментальные знания в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов и консультирует в данной предметной области	

1.4 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины: Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется без применения ЭО и ДОТ.

2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	Семестр		
		1	2	3
Контактная работа с преподавателем:	4,89 (176)			
занятия лекционного типа	2,61 (94)			
практические занятия	2,28 (82)			
Самостоятельная работа обучающихся:	2,11 (76)			
курсовое проектирование (КП)	Нет			
курсовая работа (КР)	Нет			
Промежуточная аттестация (Зачёт) (Экзамен)	2 (72)			

3 Содержание дисциплины (модуля)

3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

		Контактная работа, ак. час.							
№ п/п	Модули, темы (разделы) дисциплины	Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа				Самостоятельная работа, ак. час.	
				Семинары и/или Практические занятия		Лабораторные работы и/или Практикумы			
		Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС	Всего	В том числе в ЭИОС
1. Случайные события									
	1. Классическое определение вероятности. Предмет теории вероятностей. Понятие статистической закономерности. История возникновения и развития, связь с другими науками. Статистическое определение вероятности. Классическая вероятностная модель для случая равновероятных исходов. Приложения комбинаторики в теории вероятностей.	2							
	2. Основания теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Понятие случайного события и его вероятности. Операции над событиями. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятности. Алгебры и σ -алгебры. Аксиоматика А.Н. Колмогорова.	2							

3. Определение вероятностного пространства. Классическое и геометрическое вероятностные пространства. Геометрическая вероятность. Задача Бюффона* . Дискретное и непрерывное вероятностные пространства	2							
4. Независимые события. Независимость событий. Условная вероятность. Теорема умножения. Теоремы исчисления вероятностей. Теорема сложения. Формула полной вероятности. Формула Байеса	2							
5. 5. Схемы испытаний. Схемы независимых испытаний. Прямое произведение вероятностных пространств; схема Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Полиномиальная схема. Схемы зависимых испытаний	2							
6. Предельные теоремы для схемы Бернулли. Теорема Пуассона, локальная* и интегральная предельные теоремы Муавра-Лапласа. Свойства функций $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, $\Phi_0(x)$ *	2							
7. Классическое определение вероятности			2					
8. Основания теории вероятностей			2					
9. Геометрическое определение вероятности			2					
10. Теоремы исчисления вероятностей			2					
11. Формула Байеса. Формула полной вероятности			2					
12. Схемы испытаний			2					
13. Предельные теоремы			2					
14. Контрольная работа 1			2					
15.							40	

2. Случайные величины								
1. Функция распределения. Понятие случайной величины. Функция распределения и ее свойства. Дискретные случайные величины. Распределения: вырожденное, Бернулли, биномиальное, пуассоновское, геометрическое и др.	2							
2. Абсолютно непрерывные распределения. Абсолютно непрерывные распределения. Плотность распределения и ее свойства. Распределения: нормальное, равномерное, показательное, Коши и др. Функции одномерной случайной величины.	2							
3. Числовые характеристики одномерной случайной величины. Дисперсия и ее свойства. Начальные моменты. Мода, медиана, коэффициенты асимметрии и эксцесса, квантили. Вычисление математического ожидания и дисперсии для основных распределений	2							
4. Функция от случайной величины. Функции одномерных случайных величин. Преобразование распределений. Параметры сдвига и растяжения	2							
5. Производящие и характеристические функции. Определения и свойства производящих функций. Преобразование Лапласа. Характеристические функции. Определения и свойства. Характеристические и производящие функции основных распределений. Нахождение закона распределения по характеристической функции.	2							

6. Многомерные случайные величины. Совместное распределение, частные распределения. Совместная функция и плотность распределения. Независимость случайных величин.	2							
7. Линейная зависимость между случайными величинами. Ковариация. Понятие коррелированности. Коэффициент корреляции и его свойства. Линейная регрессия двух переменных. Остаточная дисперсия.	2							
8. Распределения суммы и произведения независимых случайных величин. Свертка случайных величин. Распределения суммы и разности, произведения и частного независимых случайных величин. Примеры. Многомерное нормальное распределение	2							
9. Условные распределения. Условные распределения относительно событий. Условная функция и плотность распределения, условное математическое ожидание. Условные распределения относительно случайных величин. Функция регрессии. Линия регрессии. Корреляционное отношение. Линейная регрессия в случае многомерного нормального распределения	2							
10. Предельные теоремы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Различные виды сходимости случайных последовательностей, их взаимосвязь. Закон больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Усиленный закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	2							

11. Моделирование случайных величин. Таблица случайных чисел. Генераторы псевдослучайных чисел. Физические и алгоритмические методы получения случайных последовательностей. Моделирование непрерывной и дискретной случайных величин. Метод Монте-Карло. Моделирование многомерных случайных величин.	2							
12. Дискретные случайные величины			2					
13. Абсолютно непрерывные распределения			2					
14. Функции случайных величин			2					
15. Числовые характеристики случайных величин			2					
16. Производящие и характеристические функции			4					
17. Зависимость. Условные распределения			2					
18. Предельные теоремы			2					
19. Контрольная работа 2			2					
3. Выборочная теория								
1. Основные понятия. Генеральная совокупность. Простая случайная выборка. Задачи математической статистики. Статистическая модель, параметрическая модель, регулярная модель. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Теоремы Гливенко, Смирнова и Колмогорова. Порядковые статистики. Распределение минимального и максимального элемента. Распределение k-й порядковой статистики.	2							

<p>2. Выборочные характеристики. Начальные и центральные выборочные моменты, их свойства. Выборочные мода, медиана, квантили, выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса. Асимптотическое поведение выборочных моментов. Асимптотическая нормальность.</p>	2							
<p>3. Группировка выборки. Числовые характеристики группированной выборки. Поправки Шепарда. Графические характеристики выборки. Полигон, гистограмма, кумулята. Статистическая обработка случайной выборки.</p>	2							
<p>4. Важные распределения математической статистики. Распределение Пирсона χ^2, распределения Стьюдента и Фишера. Доказательство свойств распределений Пирсона, Стьюдента и Фишера. Теорема Фишера. Теоремы о распределениях выборочных характеристик нормальной совокупности.</p>	2							
<p>5. Точечное статистическое оценивание. Несмещенность и состоятельность. Класс несмещенных оценок. Достаточные условия состоятельности.</p>	2							
<p>6. Неравенство Рао – Крамера. Оптимальность оценок. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао – Крамера. Обобщения неравенства Рао – Крамера. Различные формы информационного количества Фишера. Эффективные оценки.</p>	2							

7. Методы получения оценок. Метод максимального правдоподобия, метод моментов. Свойства оценок максимального правдоподобия и оценок метода моментов. Асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия.	2							
8. Оценивание параметрической функции. Класс функций, имеющих эффективные оценки. Экспоненциальное семейство. Байесовское и минимаксное оценивание.	2							
9. Статистические модели			2					
10. Выборочные характеристики			2					
11. Группировка выборки			2					
12. Распределения χ^2 , Стьюдента, Фишера			2					
13. Распределения выборочных характеристик			2					
14. Несмещенные и состоятельные оценки			2					
15. Эффективные оценки			2					
16. Контрольная работа 3			2					
17.							9	
4. Оценивание и проверка статистических гипотез								
1. Достаточные статистики. Определение, примеры, свойства. Теорема факторизации. Связь достаточных статистик с эффективными оценками и с оценками максимального правдоподобия. Минимальные достаточные статистики.	2							

<p>2. Оптимальные оценки. Свойства оптимальных оценок, теорема единственности, связь с достаточными статистиками. Полные статистики. Теорема Рао – Блекуэлла – Колмогорова. Улучшение несмещенной оценки посредством усреднения по достаточной статистике.</p>	2							
<p>3. Интервальные оценки. Общая схема построения доверительного интервала. Центральные интервалы, интервалы минимальной длины. Доверительные интервалы параметров нормального распределения. Асимптотические доверительные интервалы. Доверительные интервалы для параметров моделей Бернулли и Пуассона.</p>	2							
<p>4. Основные понятия теории проверки гипотез. Понятия статистической гипотезы, статистического критерия, критической области. Процедура проверки статистической гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы, уровень значимости, простые и сложные гипотезы. Ошибки первого и второго рода, мощность критерия.</p>	2							
<p>5. Подходы к сравнению статистических критериев. Сравнение мощности критериев. Наилучшая критическая область и ее нахождение. Критерий Неймана – Пирсона. Критерий отношения правдоподобия. Байесовские и минимаксные критерии. Несмещенные и состоятельные критерии. Рандомизированные критерии. Лемма Неймана – Пирсона. Примеры равномерно наиболее мощных критериев</p>	2							

6. Критерии проверки гипотез о параметрах нормального распределения. Проверка гипотез о параметрах случайной нормальной выборки; двух независимых выборок; парных выборок. Критерий Фишера равенства дисперсий, Критерий Стьюдента равенства средних значений.	2							
7. Однофакторная статистическая модель. Дисперсионный анализ выборок из нормального распределения. множественное сравнение средних значений нормальных выборок.	2							
8. Непараметрические критерии. Непараметрические критерии для проверки гипотез о параметрах. Критерий знаков. Ранговый критерий Уилкоксона. Примеры преобразований, стабилизирующих экспертные оценки	2							
9. Критерии согласия. Состоятельность критерия. Построение критерия согласия. Проверка гипотез о виде распределения; критерии Пирсона χ^2 и Колмогорова. Проверка гипотез однородности и независимости.	2							
10. Оценка параметров уравнения регрессии. Модель линейной регрессии. Достаточные статистики в линейных моделях. Метод наименьших квадратов. Оценивание параметров уравнения регрессии. Теорема Гаусса – Маркова. Ортогональные планы. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии.	2							
11. Методы получения оценок			2					
12. Экспоненциальное семейство			2					
13. Достаточные статистики, оптимальные оценки			2					

14. Доверительные интервалы			2					
15. Статистические гипотезы			2					
16. Проверка параметрических гипотез			2					
17. Проверка гипотез о виде распределения			2					
18. Непараметрические критерии			2					
19. Модель линейной регрессии			2					
20. Контрольная работа 4			2					
21.							9	
5. Случайные процессы. Основные понятия								
1. Определение случайного процесса. Случайная функция, случайный процесс, случайная последовательность. Примеры случайных процессов (случайные блуждания, процесс восстановления, модель Крамера- Лундберга). Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений. Условия согласованности. Математическое ожидание, ковариационная функция, матрица ковариаций n-мерного случайного процесса.		2						
2. 36. Основные классы случайных процессов. Процессы стационарные в широком и узком смысле; с независимыми приращениями; марковские процессы; гауссовские процессы; винеровский и пуассоновский процессы.		2						
3. Характеристики случайного процесса			2					
4. Основные классы случайных процессов			2					
5.							4	
6. Случайные процессы с дискретным временем								

1. Стационарные случайные процессы с дискретным временем. Стационарные случайные последовательности, их характеристики. Теорема Герглотца. Спектральное представление. Дискретный белый шум.	2							
2. Процессы авторегрессии и скользящего среднего. Условие стационарности. Общая модель АРПСС (ARIMA). Мартингалы с дискретным временем. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Моменты остановки, их свойства. Тождества Вальда.	2							
3. Цепи Маркова. Основные понятия, примеры. Состояния существенные, сообщающиеся. Неразложимые цепи Маркова. Состояния возвратные, нулевые, периодические. Классификация состояний в неразложимой цепи Маркова. Теорема солидарности.	2							
4. Эргодические цепи Маркова. Эргодичность и стационарные распределения. Условия существования стационарного распределения. Предельное распределение. Моделирование цепей Маркова.	2							
5. Случайные блуждания. Случайные блуждания на целочисленной прямой и в пространстве. Возвратность. Приложения блужданий. Моделирование случайных блужданий.	2							
6. Ветвящиеся процессы. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Вероятности вырождения и предельные распределения.	2							
7. Цепи Маркова. Классификация состояний			2					

8. Эргодические цепи Маркова. Контрольная работа 5			2					
9.							6	
7. Случайные процессы с непрерывным временем								
1. Случайные процессы с непрерывным временем. Сходимость в среднем квадратичном. Условия существования предела, не-прерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Стохастические дифференциальные уравнения. Эргодичность. Примеры.	2							
2. Пуассоновский процесс и поток. Цепи Маркова с непрерывным временем. Приложения в теории массового обслуживания.	2							
3. Броуновское движение. Винеровский процесс, его построение и свойства. Общие гауссовские процессы. Условия существования. Свойства траекторий гауссовского процесса	2							
4. Интеграл Ито. Стохастический интеграл. Стохастический дифференциал. Формула Ито.	2							
5. Дифференцируемость и интегрируемость			2					
6. Гауссовские процессы. Винеровский процесс.			2					
7.							8	
Всего	94		82				76	

4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

4.1 Печатные и электронные издания:

1. Крупкина Т. В., Гречкосеев А. К., Федоров Г. А. Математическая статистика: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины(Красноярск: ИПК СФУ).
2. Крупкина Т. В., Пыжев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: Ч. 1: сборник задач для студентов института математики направлений 010100.62, 010500.62, 010300.62, 010101.65 и 010501.65 (Красноярск: СФУ).
3. Крупкина Т. В., Пыжев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: Ч. 2: сборник задач для студентов института математики направлений 010100.62, 010500.62, 010300.62, 010101.65 и 010501.65 (Красноярск: СФУ).
4. Крупкина Т. В., Пыжев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: Ч. 3: сборник задач для студентов института математики направлений 010100.62, 010500.62, 010300.62, 010101.65 и 010501.65 (Красноярск: СФУ).
5. Крупкина Т. В., Пыжев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: Ч. 4: сборник задач для студентов института математики направлений 010100.62, 010500.62, 010300.62, 010101.65 и 010501.65 (Красноярск: СФУ).
6. Крупкина Т. В., Бабеньшев С. В., Гречкосеев А. К., Кирик Е. С. Теория вероятностей и случайные процессы: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины(Красноярск: ИПК СФУ).

4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):

1. Методика проведения занятий предусматривает использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), обеспеченных соответствующим программным обеспечением.

4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Учебная и научная литература по курсу. Компьютерные демонстрации, связанные с программой курса, технические возможности для их просмотра. Наличие компьютерных программ общего назначения.
2. Операционные системы: семейства Windows (не ниже Windows XP).
3. Электронные курсы для студентов Института математики «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Случайные процессы»на сайте
4. <http://study.sfu-kras.ru>.

5 Фонд оценочных средств

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Аудитория должна быть оборудована современным видеопроекционным оборудованием для презентаций, вычислительной техникой, а также иметь интерактивную доску или доску для письма маркерами.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, в зависимости от нозологий, осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.

Лекционная аудитория (наличие меловой или маркерной доски) и аудитория для практических занятий.